DURÉE: 4 HEURES

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé, une seule à la fois étant admise sur la table ou le poste de travail, et aucun n'échange n'est autorisé entre les candidats

Partie I

EXERCICE 1

On désigne par $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, et $E(x)$ la partie entière d'un nombre réel x.

Soit $p_0, p_1, \ldots$ une suite de nombres entiers telle que

$$1 < p_n \leq p_{n+1} \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

On définit la suite

$$x_n = p_0^{-1} + (p_0 p_1)^{-1} + \ldots\ldots + (p_0 p_1 \ldots p_n)^{-1}.$$

Question 1 Montrer que x_n est une suite de Cauchy, i.e.

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N > 0 \text{ t.q. } \forall n \geq N,\ \forall k \geq 0,\ |x_{n+k} - x_n| < \epsilon$$

On admettra par la suite que toute suite de Cauchy de nombres réels est convergente.

Question 2 Montrer que $\bar{x} = \lim_{n \to +\infty} x_n$ appartient à l'intervalle $]0, 1]$.

Question 3 Soient les suites y_n et z_n définies comme suit

$$y_0 = x \in]0, 1]$$
$$p_n = E(y_n^{-1} + 1) \text{ et } y_{n+1} = p_n y_n - 1, \text{ pour tout } n \geq 0$$

Tournez la page S.V.P.

Montrer que cette suite est bien définie, et que $y_n \in]0,1]$ pour tout n. Montrer alors que l'on a

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x$$

(On pourra poser $q_n = p_0 p_1 \dots p_n$).

Question 4 Montrer l'équivalence suivante

$$x \in \mathbb{Q}\cap]0,1] \iff \exists N > 0 \text{ t.q. } p_n = p_N,\ \forall n > N$$

EXERCICE 2

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Soit une fonction $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ continue. On définit les fonctions

$$\begin{array}{rccl} g : & [0,1] & \mapsto & \mathbb{R} \\ & x & \to & g(x) = \min\limits_{y\in[0,1]} f(x,y) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} h : & [0,1] & \mapsto & \mathbb{R} \\ & y & \to & h(y) = \max\limits_{x\in[0,1]} f(x,y) \end{array}$$

Question 1 Montrer par l'absurde que les fonctions g et h sont continues. On rappelle que toute suite de nombres réels z_n dans $[0,1]$ admet une sous-suite convergente dans $[0,1]$.

Question 2 Soient les nombres

$$a = \max_{x\in[0,1]} g(x) \quad \text{et} \quad b = \min_{y\in[0,1]} h(y)$$

Comparer a et b.

Question 3 Montrer l'implication

$$a = b \iff \exists(\bar{x},\bar{y}) \in [0,1]^2 \text{ t.q. } f(x,\bar{y}) \le f(\bar{x},y),\ \forall (x,y) \in [0,1]^2$$

Question 4 On choisit la fonction

$$f(x,y) = 1 - (2x - 4y + 1)^2$$

Déterminer l'expression analytique des fonctions g et h, puis tracer leurs graphes.

EXERCICE 3

Soient les matrices

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où α et β sont deux nombres réels.

Question 1 Calculer les puissances J^n de la matrice J, pour n entier positif.

Question 2 Calculer les puissances M^n de la matrice M, pour n entier positif. On notera (si besoin) I la matrice identité.

Partie II

EXERCICE 4

Soit (Ω, T, p) un espace probabilisé, A et B deux événements réalisables non indépendants tel que $A \cap B = \emptyset$, $A \nsubseteq B$. On rappelle la formule de Bayes

$$p(B/A) = \frac{p(A/B)p(B)}{p(A/B)p(B) + p(A/\overline{B})p(\overline{B})} .$$

Question 1 On pose $\alpha = \frac{p(A/\overline{B})}{p(A/B)}$. Montrer que

$$p(B/A) = \frac{p(B)}{\alpha + (1-\alpha)p(B)} ,$$

et en déduire que $p(B/A)$ est une fonction strictement croissante de $p(B)$.

Question 2 Application: un test est destiné à déceler la présence d'une maladie dans une population.

- Lorsque la maladie est présente, le test la révèle dans 99 % des cas.
- Lorsque la maladie est absente, le test révèle cette absence dans 99 % des cas.

On convient de dire que le test est efficace si, révélant la présence de la maladie chez une personne choisie au hasard dans la population, il y'a

Tournez la page S.V.P.

une probabilité au moins égale à 0.95 que cette personne soit effectivement atteinte de la maladie.

En utilisant la première question, déterminer à partir de quel pourcenatge de personnes atteintes de la maladie dans la population le test est efficace.

EXERCICE 5

En l'absence de mortalité, la croissance de toute population de bactéries est modélisée par l'équation $N(t) = N_0 e^{kt}$, où $N(t)$ est le nombre de bactéries à l'instant t et N_0 est le nombre de bactéries à l'instant initial $t = 0$. L'unité de temps choisie est un jour (24 heures). Les nombres N_0 et k dépendent du type de population bactérienne considérée.

On s'intéresse à une population particulière. Des numérations faites tous les jours à partir du 2e donne les résultats suivants:

t_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N_i	55	90	135	245	403	665	1100	1810	3000	4450	7350

avec t_i :jour de l'observation, N_i : nombre de bactéries au jour t_i.

On pose $y_i = \ln(N_i)$ et $Y(t) = \ln(N(t)) = \ln(N_0) + kt$, où ln représente le logarithme népérien.

Question 1 Calculer les moyennes des observations t_i et y_i ainsi que les écarts types de ces observations.

Question 2 Par la méthode des moindres carrés, déterminer la droite de régression de Y en t. Calculer le coefficient de corrélation des séries d'observations ainsi que le résidu quadratique moyen.

Question 3 Ecrire le modèle théorique ajusté aux données (t_i, N_i) auquel conduisent les estimations de N_0 et k.

Question 4 Au bout d'un jour, quelle est l'estimation du nombre de bactéries? Au bout de combien de jours peut-on prévoir que le nombre de bactéries sera 2000 fois celui du nombre initial?